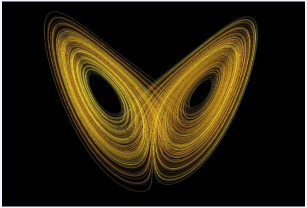
OMM - Nelinearne diferencne jednačine (Teorija haosa)

April 21, 2023

Nelinearne diferencne jednačine prvog reda

Edvard Lorens (1917-2008)

- Američki matematičar i metereolog
- Razvio je numeričke modele atmosfere
- Za račun potreban za vremensku prognozu koristio je numeričke metode na računaru
- (1961.) Jednom prilikom je zaustavio računar u svom izračunavanju i kada ga je ponovo pokrenuo, umesto da unese broj na kom je račun stao, Lorenca je mrzelo da kuca 0.506127 nego je zaokruzio broj na 0.506. Dobio je rezultate koji nisu bili ni blizu originalnim, koje je Lorenc interpretirao kao: "...računar se opet pokvario ili nisam dobro ukucao broj...". Međutim, on je bio na tragu nove nauke!



Efekat leptira:
Da li mahanje krila leptira u Srbiji može da izazove uragan u Americi?

Nelinearne diferencne jednačine prvog reda

Logistička jednačina

Diferencijalna jednačina (rađena na 4. času):

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = by(1-y), \quad y(0) = y_0 \in (0,1)}$$

Diferencna jednačina (Ojlerova eksplicitna metoda za rešavanje Košijevog zadatka):

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + hby_n(1-y_n)}$$

Smena: $y_n = \frac{1+hb}{hb} x_n$, oznaka: $r = 1 + bh$

$$\boxed{x_{n+1} = rx_n(1-x_n), \quad x_0 \in (0,1)}$$

Džejms Jork

- "Otkrio" Lorencov rad.
- Dao ovoj novoj nauci ime - teorija haosa.
- Dokazao još neke bitne stvari iz teorije haosa koje nisu predmet ovog kursa (npr. da u svakom sistemu sa jednom dimenzijom ako se ikada pojavi pravilni ciklus perioda 3 to znači da će taj sistem ispoljiti i regularne periode svake druge dužine, kao i haotične cikluse).

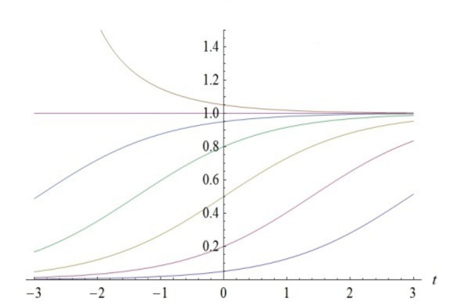
Robert Mej (1936 - 2020)

Primetio da u logističkom preslikavanju $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$:

- Ako je reproduktivna stopa r populacije niska, u nekom eko-sistemu, model dostiže stabilnost.
- Ako se poveća r, za taj isti eko-sistem, stanje se razlama u 2 stanja (populacija je naizmenično bila čas u jednoj, čas u drugoj brojnosti).
- Kada r postane još veće, za taj isti eko-sistem, on se ponaša nepredvidivo.

Analiza i diskusija (diferencijalna jednačina):

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = by(1-y), \quad y(0) = y_0 \in (0,1)} \Longrightarrow y(t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{y(0)} - 1\right) \cdot e^{-rt}}$$

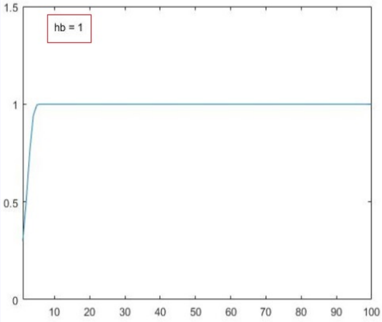


- Rešenja su glatka.
- 2 stacionarna rešenja:
  - $x = 0$ (nestabilno)
  - $x = 1$ (stabilno)

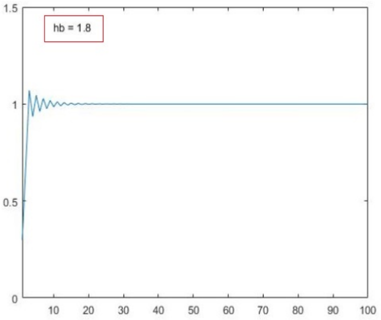
Analiza i diskusija (numerička metoda):

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + hby_n(1 - y_n)}$$

Primer: $y_0 = 0.3$. Menjamo *hb* (korak metode i/ili konstantu iz jednačine (reproduktivnu stopu)):

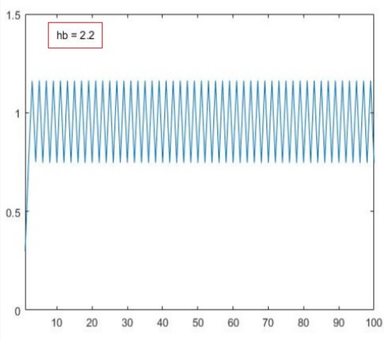


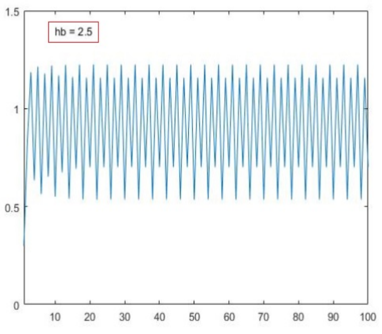
Asimptotski se približava 1



Prigušene oscilacije na početku, ali konvergencija ka 1

Analiza i diskusija (numerička metoda) (cont.):

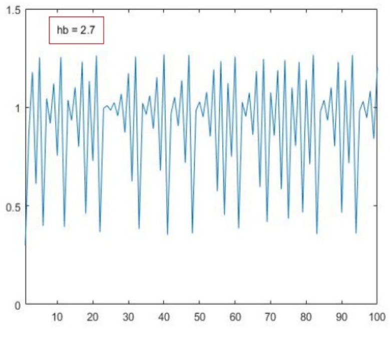


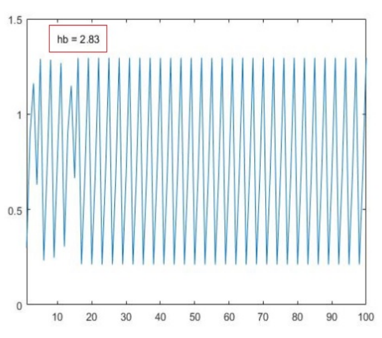


Osciluje oko 2 tačke
(jedna manja od 1,
druga veća od 1)

4 tačke nagomilavanja
(ni jedna nije 1)

Analiza i diskusija (numerička metoda) (cont.):





Haotične pojave
(nepredvidivo osciluje)

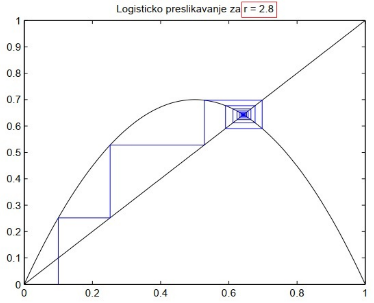
3 tačke nagomilavanja

Analiza i diskusija:

$$\boxed{x_{n+1} = rx_n(1 - x_n), \quad x_0 \in (0, 1)}$$

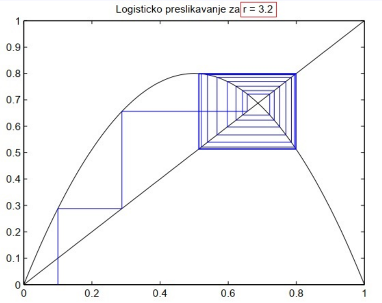
Jednačina $x = rx(1 - x)$ ima 2 rešenja: $x = 0$ i $x = \frac{r-1}{r}$.
Za $x \neq 0$, ukoliko je sve u redu, očekujemo da $x_n \to \frac{r-1}{r}$. Da li?
Primer: $x_0 = 0.1$. Menjamo r ($r = 1 + hb$) :

Slučaj $hb = 1.8$



Konvergencija ka $\frac{r-1}{r} \approx 0.64$

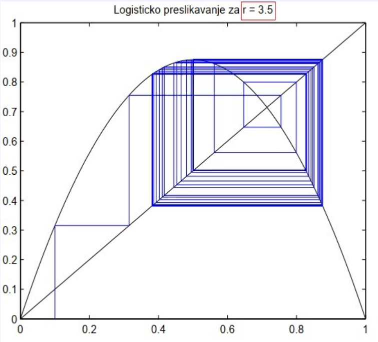
Slučaj $hb = 2.2$

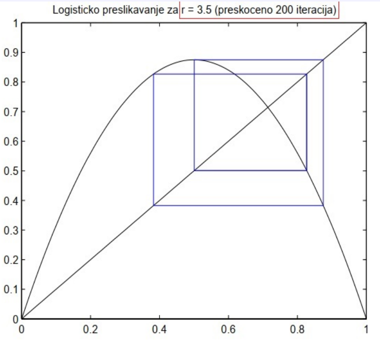


2 tačke nagomilavanja
(≈ 0.55 i ≈ 0.8)

Analiza i diskusija (cont.):

Slučaj $hb = 2.5$:

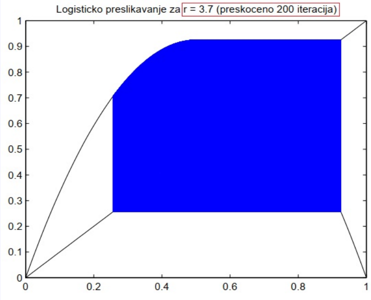




Radi preglednosti slike, na slici desno preskočeno crtanje prvih 200 iteracija sa slike levo.
4 tačke nagomilavanja.

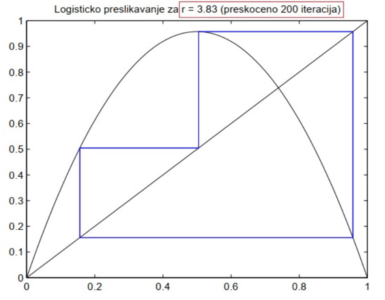
Analiza i diskusija (cont.):

Slučaj $hb = 2.7$:



Haos
(jako (beskonačno?) puno tačaka nagomilavanja)

Slučaj $hb = 2.83$:



3 tačke nagomilavanja

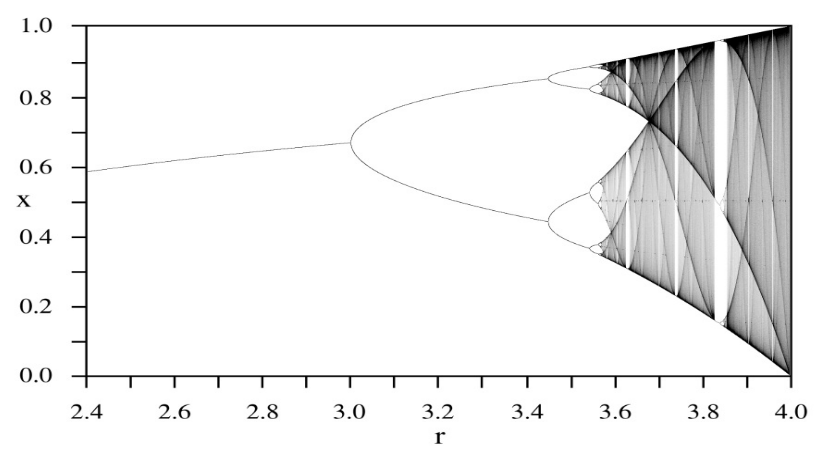
Za $\boxed{\text{r=4}}$: kompletan haos (ceo jedinični kvadrat na grafiku popunjen).

Bifurkacija - udvajanje broja tačaka nagomilavanja niza.
Robert Mej: "zmija u matematičkoj travi".

Bifurkacioni dijagram

horizontalna osa - vrednosti r

vertikalna osa - tačke nagomilavanja (brojnost vrste)



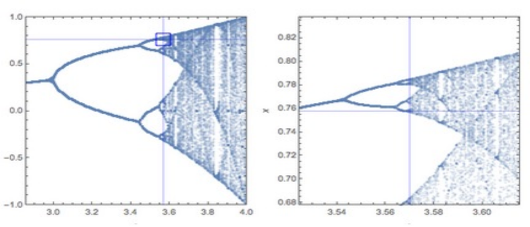
Analiza bifurkacionog dijagrama

Za različite vrednosti r, Mej je izračunao odgovarajuću vrednost populacije (konačnu, stabilnu, ravnotežnu)

- Za jako male vrednosti r populacija izumire.
- Povećanjem r do ~ 3, populacija postaje brojnija, raste i nivo ravnotežne populacije.
- Za r između 3 i ~ 3.5 postoje 2 moguće brojnosti populacije (jedne godine veća, a sledeće godine manja, pa opet veća itd.) Ciklus je dvogodišnji.
- Povećanjem r, populacija ima 4 različite moguće brojnosti. Ciklus je četvorogodišnji.
- Povećanjem r dolazi do novih "grananja": 4, 8, 16, 32,...i onda nastaje haos. U haosu nema periodičnosti ni pravilnosti.
- Daljim povećanjem r:
  - za $r \approx 3.65$ "prozor" sa 7 tačaka nagomilavanja, onda krenu nove bifurkacije sa 7, 14, 28, ... i onda opet haos;
  - za $r \approx 3.75$ "prozor sa 5 tačaka nagomilavanja, onda krenu nove bifurkacije sa 5, 10, 20, ... i onda opet haos;
  - za $r \approx 3.83$ "prozor sa 3 tačake nagomilavanja, onda krenu nove bifurkacije sa 3, 6, 12,... i onda opet haos;

Još neka zapažanja

- Haotična ponašanja se dešavaju kad je diferencna jednačina nelinearna.
- Zumiranjem nekog manjeg dela bifurkacionog dijagrama, zumiran (manji) deo pokazuje karakteristike onog većeg (fraktalna struktura).



- Da bi numerička metoda za rešavanje logističke diferencijalne jednačine bila stabilna, mora $r < 3$ tj. za korak $h < \frac{2}{b}$.
- Smena $z_n = \frac{r}{2}(1 - 2x_n)$: $z_{n+1} = z_n^2 + C$ (trebaće kasnije)

Nelinearne diferencne jednačine drugog reda

Michel Henon (1931 - 2013)
Henonovo preslikavanje

$$\boxed{x_{n+1} = bx_{n-1} + 1 - ax_n^2, \quad x_0 = x_1 = 0} \quad a, b > 0$$

Ekvivalentan sistem diferencnih jednačina prvog reda:

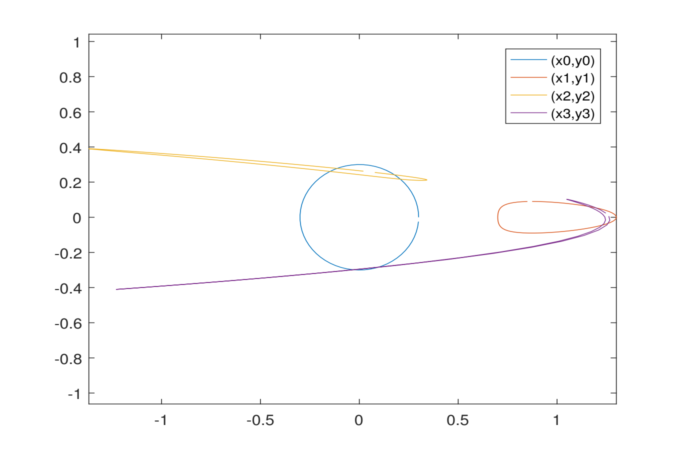
$$\boxed{\begin{aligned} x_{n+1} &= y_n + 1 - ax_n^2 \\ y_{n+1} &= bx_n \end{aligned}}$$

$$x_0 = 0, y_0 = 0$$

- Šta su tačke nagomilavanja za Henonovo preslikavanje?

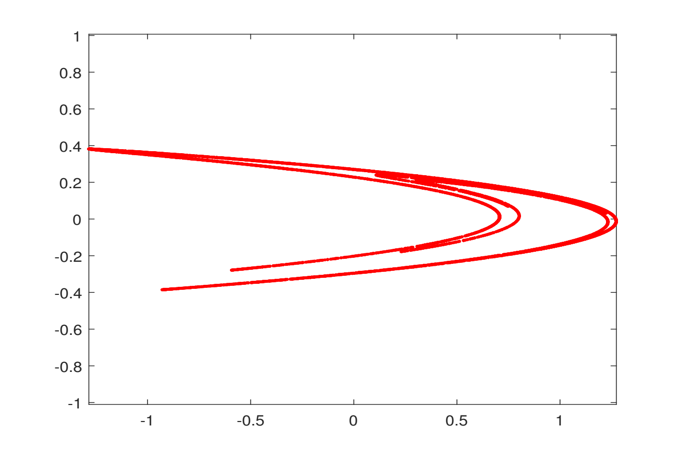
Aktraktor nekog preslikavanja - skup svih njegovih tačaka nagomilavanja.

$a = 1.4, b = 0.3$
Primer: skup tačaka $\{(x_0, y_0) : x_0^2 + y_0^2 = 0.3^2\}$

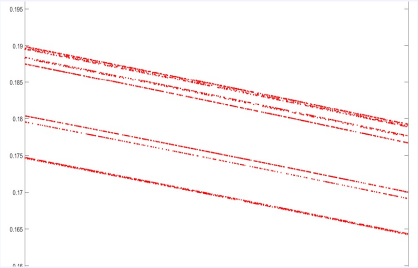


$a = 1.4, b = 0.3, x_0^2 + y_0^2 = 0.3^2$

Nakon preskočenih 200 iteracija:



Henonov atraktor



Zumirana jedna "linija" (crtano samo 5000 iteracija = 5000 tačaka nagomilavanja)

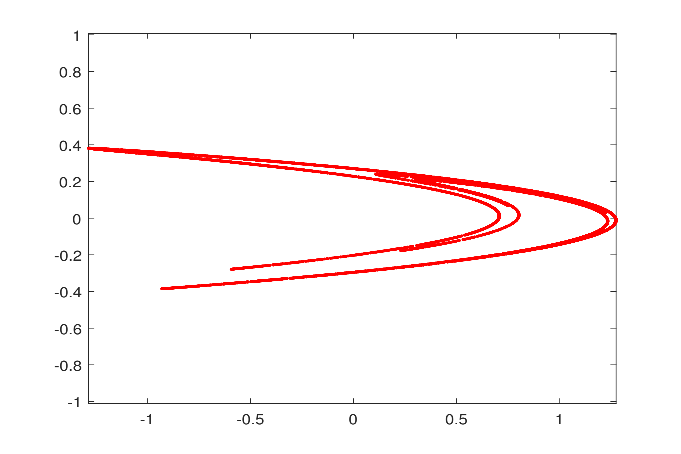
Čini se da je linija na pojedinim mestima debela. Ali, ako se uveća ispostavi se da nije debela - nego da je sastavljena od dve zasebne linije. Uz dodatno uveličanje, pokaže se da su te dve u stvari četiri, i to jedan par blizu a drugi par nešto dalje. Svaka od tih linija sastoji od po dve... i tako sve dalje i dalje, u beskonačnost.

Ovih "slojeva" ima beskonačno kad $n \to \infty$!
(beskonačno lisnato testo)

Čudni atraktori - atraktori koji ispoljavaju fraktalnu osobinu.

$a = 1.4, b = 0.3$
Primer: jedna tačka $(x_0, y_0) = (0, 0)$

Nakon preskočenih 200 iteracija:



Potpuno je svejedno od čega smo krenuli!

Henonov atraktor:

- Čudni atraktor
- Ako se posmatra kao skup zakrivljenih linija, zbog beskonačnog broja slojeva, ne postoji dužina tog skupa/linija (bila bi beskonačno).

Jakobijan preslikavanja nam kazuje koliko će se preslikavanjem povećati ili smanjiti jedan mali deo površine u okolini tačke u kojoj se nalazimo kada se preslika.

- $|\det(J)| = |-b| = 0.3$ - svaka naredna slika je za $\sim \frac{1}{3}$ površine manja od prethodne. Kad $n \to \infty$ površina će eksponencijalnom brzinom težiti nuli.

Henonov (čudni) atraktor je beskonačan skup, beskonačne dužine, mere 0!